

3.4.3 Množiny bodů dané vlastnosti I

Předpoklady: 3401

Některé z těchto množin už známe.

Jak je definována kružnice $k(S; r)$?

Množina všech bodů roviny, které mají od středu S vzdálenost r .

Předchozí věta znamená dvě věci:

- Vzdálenost každého bodu kružnice od středu S je rovna r (všechny body na kružnici mají zmiňovanou vlastnost).
- Každý bod v rovině, jehož vzdálenost od bodu S , leží na kružnici k (všechny body, které mají vlastnost leží na kružnici).

Uvedenou vlastnost kružnice můžeme zapsat i symbolicky: $k(S; r) = \{X \in \rho; |SX| = r\}$.

Kružnice $k(S; r)$ je množina všech bodů roviny, které mají od daného bodu S danou vzdálenost r . Symbolicky $k(S; r) = \{X \in \rho; |SX| = r\}$.

Stejným způsobem budeme postupovat i u dalších vlastností:

Množina M všech bodů roviny ρ , které mají danou vlastnost je množina bodů, pro kterou současně platí:

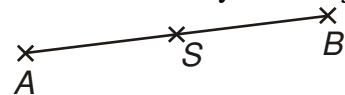
- Každý bod množiny M má danou vlastnost.
- Každý bod roviny, který má danou vlastnost, patří do množiny M .

\Rightarrow pokud bychom chtěli o kružnici dokázat, že je množinou všech bodů..., museli bychom dokazovat platnost obou předchozích vět.

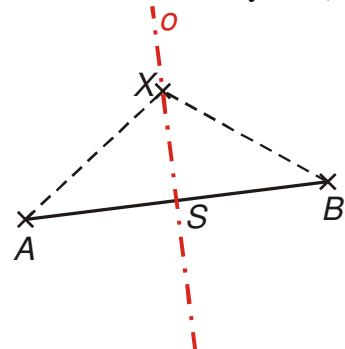
Dodatek: V mnoha případech se místo druhé podmínky dokazuje ekvivalentní podmínka „každý bod, který do množiny M nepatří, nemá danou vlastnost“.

Př. 1: Urči množinu všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od bodů A, B .

Jedním z hledaných bodů je určitě střed úsečky.



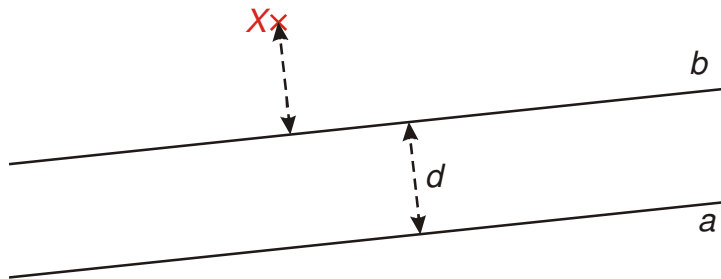
Další body můžeme získat jako vrcholy rovnoramenných trojúhelníků se základnou $AB \Rightarrow$ získáme osu úsečky AB (kolmici na úsečce AB , procházející jejím středem)



Symbolicky píšeme: $o = \{X \in \rho; |AX| = |BX|\}$

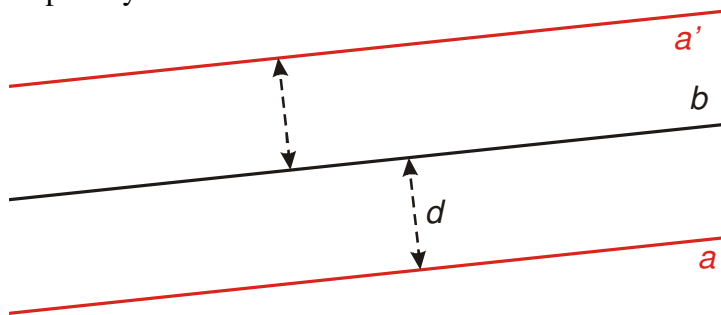
Osa úsečky AB je množina všech bodů roviny, které mají od daných bodů A , B stejnou vzdálenost. Symbolicky $o = \{X \in \rho; |AX| = |BX|\}$.

Př. 2: Je dána přímka b . Rozhodni, zda množinou všech bodů, které mají od přímky b vzdálenost $d > 0$, je přímka a mající od přímky b vzdálenost d .



V rovině existují body (například bod X), které mají od přímky b vzdálenost d a při tom neleží na přímce $a \Rightarrow$ přímka a není množinou všech bodů, které mají od přímky b vzdálenosti d .

Množinou bodů, které mají od přímky b vzdálenost $d > 0$ je dvojice přímek a, a' , které mají od přímky b vzdálenost d .

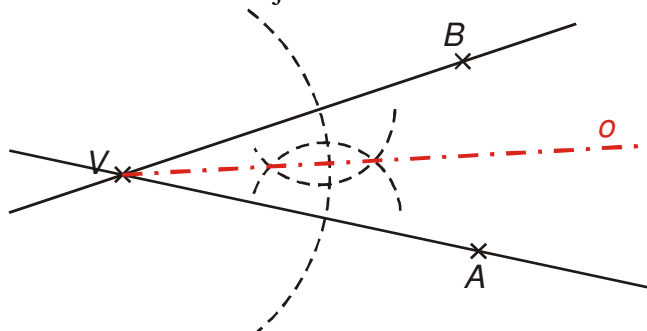


Symbolicky píšeme: $a \cup a' = \{X \in \rho; |Xb| = d\}$.

Pedagogická poznámka: Výzvu, aby studenti správnou množinu bodů z předchozího příkladu objevili, zadání neobsahuje schválně. Studenty vyzývám ústně ihned potom, co se shodnou, že samotná přímka a takovou hledanou množinou není.

Př. 3: Urči množinu všech bodů daného konvexního úhlu AVB , které mají stejnou vzdálenost od přímek, na nichž leží jeho ramena.

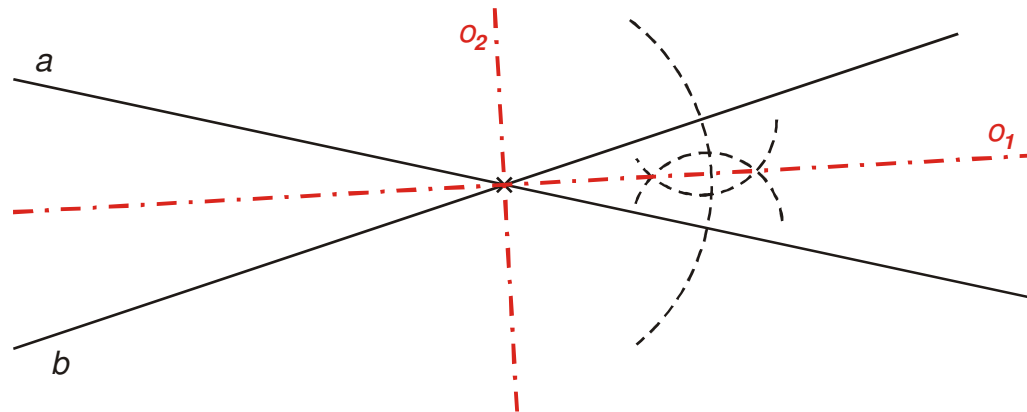
Hledanou množinou je osa konvexního úhlu AVB .



Symbolicky píšeme: $o = \{X \in \rho; |X \leftrightarrow VA| = |X \leftrightarrow VB|\}$.

Př. 4: Urči množinu všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od dvou různoběžek a, b .

Dvě různoběžky rozdělí rovinu na čtyři konvexní úhly. Jejich osy tvoří dohromady dvě přímky o_1, o_2 , které jsou navzájem kolmé. Sjednocení těchto přímek tvoří množinu všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od různoběžných přímek a, b .

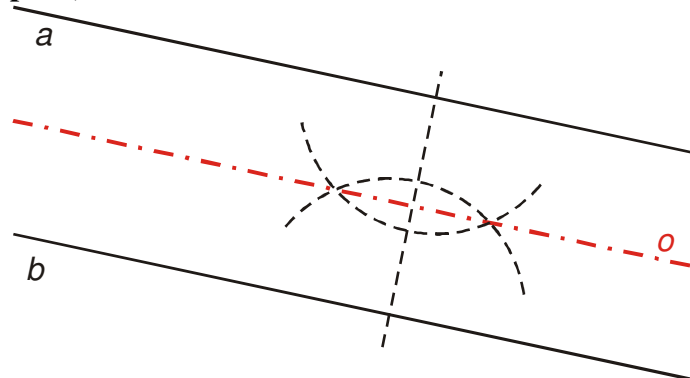


Symbolicky píšeme: $o_1 \cup o_2 = \{X \in \rho; |Xa| = |Xb|\}$

Pedagogická poznámka: Je zajímavé, že nezanedbatelná část studentů kreslí různoběžky v takové poloze, že jejich obrázek neobsahuje průsečík. V takových situacích se bavíme o tom, že obrázek by měl obsahovat „zajímavé rysy situace,, což u různoběžek bezesporu znamená průsečík. Část studentů samozřejmě zapomene jednu z os, většinou osu o_2 (ostřejší úhel více připomíná minulý příklad).

Př. 5: Urči množinu všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou různých rovnoběžných přímek a, b .

Všechny body, které mají stejnou vzdálenost od dvou různých rovnoběžných přímek a, b musí ležet „uprostřed mezi oběma rovnoběžkami“ a tvoří přímku o (někdy nazývanou **osa pásu**).



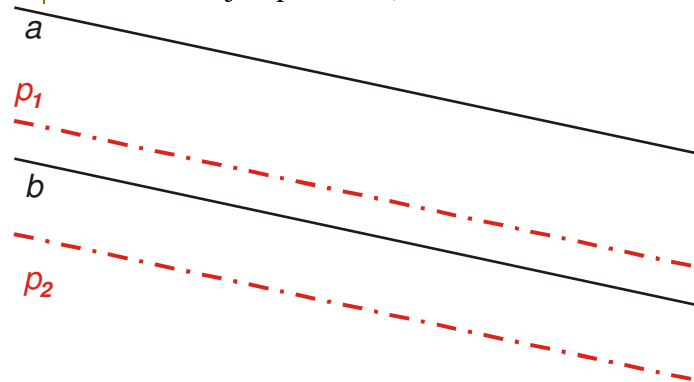
Symbolicky píšeme: $o = \{X \in \rho; |Xa| = |Xb|\}$.

Dodatek: Jak vyřešit příklad v Geogebře, aby se při větší vzdálenosti přímek osa neztratila?

Př. 6: Jsou dány dvě různé rovnoběžné přímky a, b . Urči množinu všech bodů, které mají od přímky a třikrát větší vzdálenost než od přímky b .

Hledanou množinu tvoří dvě přímky rovnoběžné s a, b :

- přímka p_1 ležící mezi přímkami a, b (blíže k přímce b)
- přímka p_2 ležící „pod přímkou b (ležící v polorovině s hraniční přímkou b neobsahující přímkou a)



Symbolicky píšeme: $p_1 \cup p_2 = \{X \in \mathbb{R}^2; |Xa| = 3 \cdot |Xb|\}$.

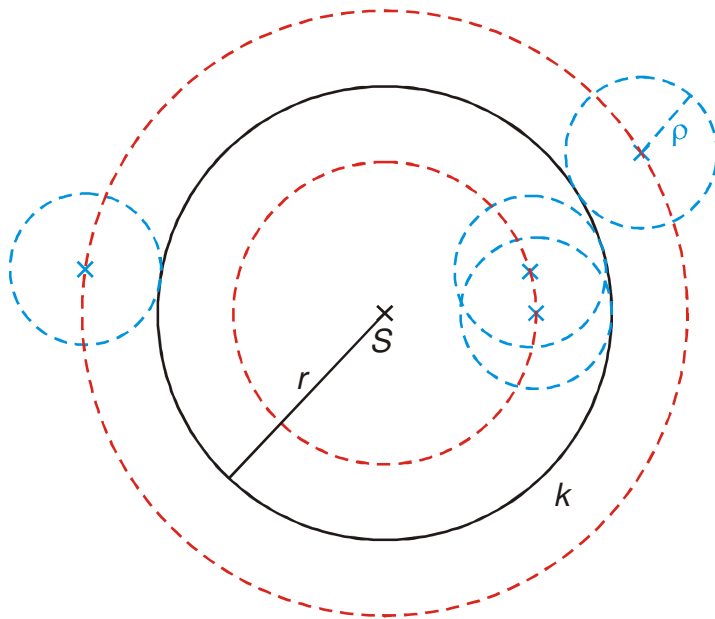
Pedagogická poznámka: Na předchozím příkladu provádíme synchronizaci třídy společnou kontrolou. Studenti často kreslí pouze jednu z obou přímek.

U všech dalších množin je důležité kreslit obrázky a zkusit množinu objevit kreslením možných řešení.

Důležité: V zadání následujícího příkladu je uvedeno, že máme nalézt středy všech kružnic o poloměru ρ . Znamená to:

- všechny kružnice, které budeme při řešení hledat (kreslit) musí mít stejný poloměr (ρ)
- hodnota poloměru ρ není zadána a proto musíme promyslet, zda se řešení nebude měnit při změně hodnoty poloměru ρ

Př. 7: Urči množinu středů všech kružnic o poloměru ρ , které se dotýkají kružnice $k(S; r)$.

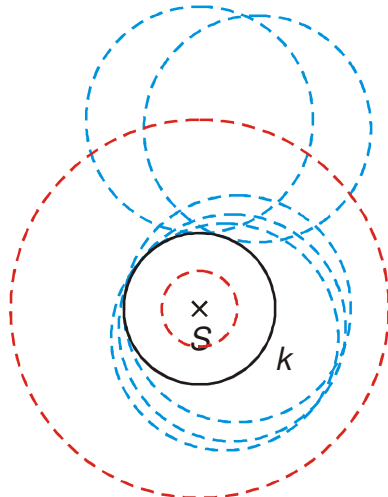


Z obrázku je zřejmé, že hledanou množinou je dvojice kružnic:

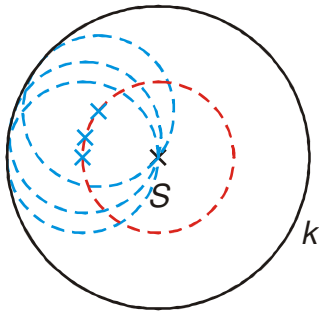
- $l(S; r + \rho)$ - větší červená kružnice
- $m(S; |r - \rho|)$ - menší červená kružnice

Pedagogická poznámka: Studenti často při kreslení zapomínají na kružnice poskládané vně kružnice k .

Při kontrole se studenti budou divit absolutní hodnotě ve výrazu pro poloměr kružnice m . Pokud je dost času, určitě stojí za to studentům zadat, aby nakreslili případ, ve kterém je nutné použít pro vyjádření poloměru kružnice m absolutní hodnotu (u nakresleného obrázku je to totiž zbytečné).

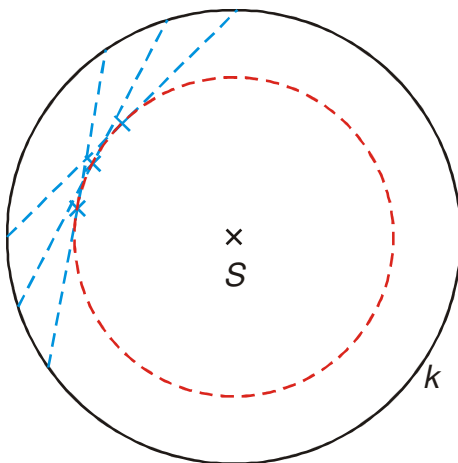


Př. 8: Urči množinu středů všech kružnic, které se dotýkají kružnice $k(S; r)$ a procházejí bodem S .

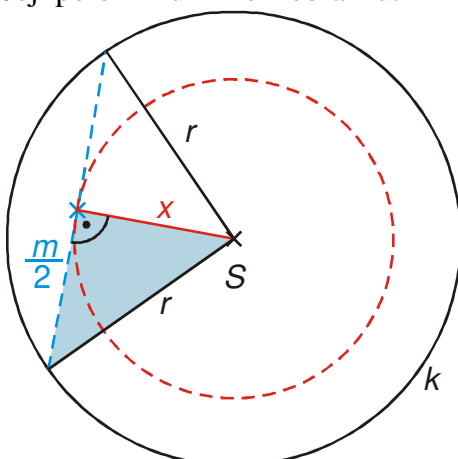


Z obrázku je vidět, že hledanou množinou bodů je kružnice $l\left(S; \frac{r}{2}\right)$.

Př. 9: Urči množinu středů všech tětiv kružnice $k(S; r)$, které mají danou délku $m < 2r$.



Z obrázku je vidět, že hledanou množinou je kružnice se středem v bodě S . Její poloměr určíme z obrázku:



Ve vyznačeném pravoúhlém trojúhelníku platí Pythagorova věta:

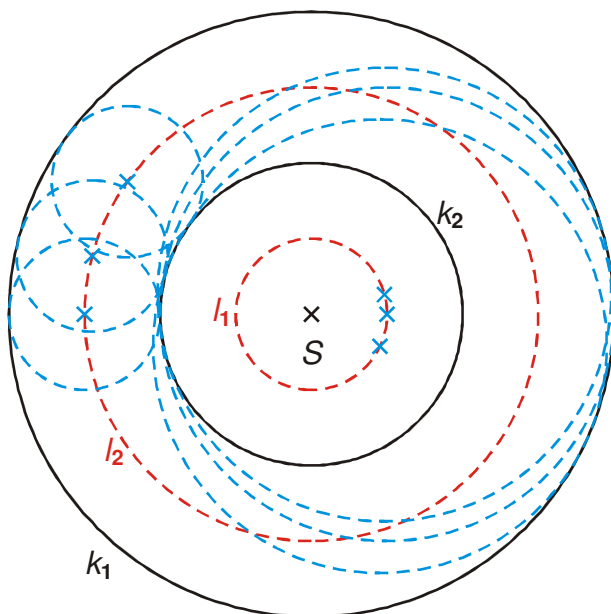
$$r^2 = x^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

$$x = \sqrt{r^2 - \frac{m^2}{4}}$$

Hledanou množinou je kružnice $l\left(S; \sqrt{r^2 - \frac{m^2}{4}}\right)$

Pedagogická poznámka: Na výpočtu poloměru netrám.

Př. 10: Urči množinu středů všech kružnic, které se dotýkají dvou soustředných kružnic $k_1(S; r_1)$ a $k_2(S; r_2)$.



Z obrázku je zřejmé, že hledanou množinou bodů tvoří dvě kružnice:

- $l_1\left(S; \frac{r_1 - r_2}{2}\right)$
- $l_2\left(S; \frac{r_1 + r_2}{2}\right)$

Př. 11: Petáková:
strana 76/cvičení 1 b) d)

Shrnutí: